

# Espaces topologiques flous

Djelloul ATHMANI    Dir. de Mémoire : Soheyb MILLES

Université de M'sila.

Master en mathématiques

promotion 2018/2019

## Introduction

La topologie générale est une branche des mathématiques qui fournit un vocabulaire et un cadre général pour traiter des notions de limite, de continuité, et de voisinage. Les espaces topologiques forment le socle conceptuel permettant de définir ces notions. Elles sont suffisamment générales pour s'appliquer à un grand nombre de situations différentes : ensembles finis, ensembles discrets, espaces de la géométrie euclidienne, espaces numériques à  $n$  dimensions, espaces fonctionnels plus complexes, mais aussi en géométrie algébrique.

En 1965, le professeur L.A. Zadeh [6], a généralisé la notion habituelle de l'ensemble par présentant "les ensembles flous". Cela nous permettent également de l'utiliser dans beaucoup de concepts comme les treillis flous, les anneaux flous, la mesure floue, l'espace topologique flou et d'autre branches.

## Introduction

En 1968, C.L. Chang [1] a défini la notion de topologie floue comme une généralisation de la notion de topologie classique. Cette théorie des espaces topologiques flous a été développée par plusieurs chercheurs. R. Lowen [3] a introduit une classe particulière d'une topologie floue, M.S Ying a donnée une nouvelle approche sur la topologie floue. Récemment, Mishra [4] a présenté et étudié la notion de la topologie floue générée par une relation floue.

## Introduction

L'objectif de ce travail est d'étudier la notion de topologie floue et quelques propriétés de base sur cette structure.

- Fuzzifier la définition de la topologie floue donné par Chang.
- Traiter la notion de la topologie floue générée par une relation floue.
- Etudier quelques classes particulières de topologie floue générée par une relation floue.

- Espaces topologiques flous.

- Espaces topologiques flous.
- Topologie floue générée par une relation floue.

- Espaces topologiques flous.
- Topologie floue générée par une relation floue.
- Topologies floues particuliers générées par des relations floues.

## 3.1 Espaces topologiques flous.



### Définition 3.1 (Topologie floue)

Une topologie floue est une famille  $T$  des ensembles flous dans  $X$  qui satisfait les conditions suivantes :

- $\emptyset, X \in T$  ;
- si  $A, B \in T$ , alors  $A \cap B \in T$  ;
- si  $A_i \in T$  pour tout  $i \in I$ , alors  $\bigcup_I A_i \in T$ .

$T$  s'appelle une topologie floue sur  $X$ , et le paire  $(X, T)$  est un espace topologique flou.

### Définition 3.1 (Topologie floue)

Une topologie floue est une famille  $T$  des ensembles flous dans  $X$  qui satisfait les conditions suivantes :

- $\emptyset, X \in T$  ;
- si  $A, B \in T$ , alors  $A \cap B \in T$  ;
- si  $A_i \in T$  pour tout  $i \in I$ , alors  $\bigcup_I A_i \in T$ .

$T$  s'appelle une topologie floue sur  $X$ , et le paire  $(X, T)$  est un espace topologique flou.

### Définition 3.2

Soit  $X$  un ensemble. Une topologie floue  $\tau$  sur  $X$  est défini par la fonction

$$\begin{aligned}\tau : [0, 1]^X &\longrightarrow [0, 1] ; \\ A &\longmapsto \mu_\tau(A)\end{aligned}$$

et satisfait les conditions suivantes :

- $\mu(\emptyset) = \mu(X) = 1$  ;
- $\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \leq \mu_{A \cap B}(x)$ , pour tout deux sous-ensembles flous dans  $[0, 1]^X$  ;
- $\mu_\tau(A_i) \leq \mu_\tau(\bigvee_{i \in I} A_i)$ , pour tout famille des sous-ensembles flous  $A_i$  dans  $[0, 1]^X$ .

$\tau$  s'appelle une topologie floue sur  $X$ , et  $(X, \tau)$  appelé espace topologique flou.

### Définition 3.3 (Ouvert flou et fermé flou)

Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique flou.

- Chaque élément de  $(X, \tau)$  s'appelle un ouvert flou.

### Définition 3.3 (Ouvert flou et fermé flou)

Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique flou.

- Chaque élément de  $(X, \tau)$  s'appelle un ouvert flou.
- Un fermé flou si et seulement si son complément est un ouvert flou.

### Définition 3.3 (Ouvert flou et fermé flou)

Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique flou.

- Chaque élément de  $(X, \tau)$  s'appelle un ouvert flou.
- Un fermé flou si et seulement si son complément est un ouvert flou.

### Exemple 3.1 (cas fini)

Soient  $X = \{a, b\}$  et  $A$  est un sous-ensemble flou sur  $X$  donné par  $A = \{\langle a, 0.5 \rangle; \langle b, 0.4 \rangle\}$ , alors  $\tau = \{\emptyset, A, X\}$  est une topologie floue. Et  $(X, \tau)$  est un espace topologique flou. Dans cet exemple,  $A$  est un ouvert flou et  $\emptyset, X$  sont des ouverts flous et fermés flous ou même temps.

### Définition 3.3 (Ouvert flou et fermé flou)

Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique flou.

- Chaque élément de  $(X, \tau)$  s'appelle un ouvert flou.
- Un fermé flou si et seulement si son complément est un ouvert flou.

### Exemple 3.1 (cas fini)

Soient  $X = \{a, b\}$  et  $A$  est un sous-ensemble flou sur  $X$  donné par  $A = \{\langle a, 0.5 \rangle; \langle b, 0.4 \rangle\}$ , alors  $\tau = \{\emptyset, A, X\}$  est une topologie floue. Et  $(X, \tau)$  est un espace topologique flou. Dans cet exemple,  $A$  est un ouvert flou et  $\emptyset, X$  sont des ouverts flous et fermés flous ou même temps.

### Exemple 3.2 (cas infini)

Soit  $X = [0, 1]$  et soit  $h \in ]0, 1]$ , on considère la fonction suivante

$$f_h(x) = \begin{cases} 2hx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] ; \\ 2h(1-x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La famille  $\tau = \{f_h : 0 < h \leq 1\} \cup \{\emptyset, X\}$  est une topologie floue, et  $(X, \tau)$  est un espace topologique flou.

### Définition 3.4 (Voisinage flou)

Un ensemble flou  $U$  dans un espace topologique flou  $(X, \tau)$  est un voisinage d'un ensemble flou  $A$  si et seulement s'il existe un ouvert flou  $O$  tels que  $A \subset O \subset U$ .

### Définition 3.4 (Voisinage flou)

Un ensemble flou  $U$  dans un espace topologique flou  $(X, \tau)$  est un voisinage d'un ensemble flou  $A$  si et seulement s'il existe un ouvert flou  $O$  tels que  $A \subset O \subset U$ .

### Remarque 3.1

Tout ouvert flou est un voisinage flou de ses éléments.



### Définition 3.4 (Voisinage flou)

Un ensemble flou  $U$  dans un espace topologique flou  $(X, \tau)$  est un voisinage d'un ensemble flou  $A$  si et seulement s'il existe un ouvert flou  $O$  tels que  $A \subset O \subset U$ .

### Remarque 3.1

Tout ouvert flou est un voisinage flou de ses éléments.

### Définition 3.5 (Point flou)

Soit  $X$  est un ensemble flou et  $x \in X$ . On définit le point flou  $P_x$  par la fonction d'appartenance suivante

$$P_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } y \in X \mid y \neq x ; \\ \lambda & \text{si } y = x. \end{cases}$$

avec  $\lambda \in ]0, 1]$ .

### Définition 3.4 (Voisinage flou)

Un ensemble flou  $U$  dans un espace topologique flou  $(X, \tau)$  est un voisinage d'un ensemble flou  $A$  si et seulement s'il existe un ouvert flou  $O$  tels que  $A \subset O \subset U$ .

### Remarque 3.1

Tout ouvert flou est un voisinage flou de ses éléments.

### Définition 3.5 (Point flou)

Soit  $X$  est un ensemble flou et  $x \in X$ . On définit le point flou  $P_x$  par la fonction d'appartenance suivante

$$P_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } y \in X \mid y \neq x ; \\ \lambda & \text{si } y = x. \end{cases}$$

avec  $\lambda \in ]0, 1]$ .

### Définition 3.6

Soient  $X$  un ensemble et  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$ . On dit que le point  $P_x^\lambda$  est appartient à  $A$  si et seulement si  $P_x^\lambda(x) \leq \mu_A(x)$ .

On note par  $P_x^\lambda \tilde{\in} A$  si le point flou  $P_x$  appartient à l'ensemble flou  $A$ .

### Exemple 3.3

Soit  $X = \{x, y, z\}$  et soit  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$  définie par  $A = \{\langle x, 0.1 \rangle; \langle y, 0.3 \rangle; \langle z, 0.5 \rangle\}$ .

Soit  $z \in X$

$$P_z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq z ; \\ z & \text{si } t = z. \end{cases}$$

$P_t^z \tilde{\in} A$ , car  $P_z(z) \leq \mu_A(z) = 0.5$ .

### Exemple 3.3

Soit  $X = \{x, y, z\}$  et soit  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$  définie par  $A = \{\langle x, 0.1 \rangle; \langle y, 0.3 \rangle; \langle z, 0.5 \rangle\}$ .

Soit  $z \in X$

$$P_z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq z ; \\ z & \text{si } t = z. \end{cases}$$

$P_t^z \tilde{\in} A$ , car  $P_z(z) \leq \mu_A(z) = 0.5$ .

### Définition 3.7 (Fermeture)

Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique flou.  $A$  est un ensemble flou dans  $X$ . La fermeture de  $A$  est un ensemble flou  $\overline{A}$  définies par :

$$\overline{A} = \{\langle x, \max_{x \in X} \mu_A(x) \rangle \mid x \in X\}.$$

### Exemple 3.3

Soit  $X = \{x, y, z\}$  et soit  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$  définie par  $A = \{\langle x, 0.1 \rangle; \langle y, 0.3 \rangle; \langle z, 0.5 \rangle\}$ .

Soit  $z \in X$

$$P_z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq z ; \\ z & \text{si } t = z. \end{cases}$$

$P_t^z \tilde{\in} A$ , car  $P_z(z) \leq \mu_A(z) = 0.5$ .

### Définition 3.7 (Fermeture)

Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique flou.  $A$  est un ensemble flou dans  $X$ . La fermeture de  $A$  est un ensemble flou  $\overline{A}$  définies par :

$$\overline{A} = \{\langle x, \max_{x \in X} \mu_A(x) \rangle \mid x \in X\}.$$

### Définition 3.8 (Intérieur)

Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique flou.  $A$  est un ensemble flou dans  $X$ . L'intérieur de  $A$  est un ensemble flou  $A^0$  définies par :

$$A^0 = \{\langle x, \min_{x \in X} \mu_A(x) \rangle \mid x \in X\}.$$

### Exemple 3.4

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles flous de  $X = \mathbb{R}$  définis comme

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} ; \\ 2x - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

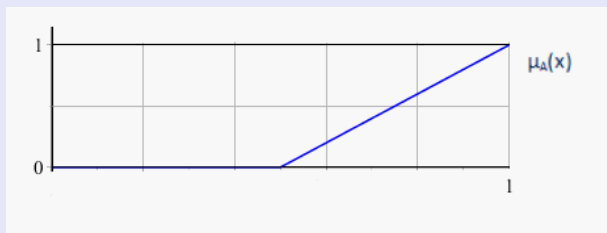


FIGURE –

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} ; \\ -4x + 2 & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} ; \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

### Exemple 3.4

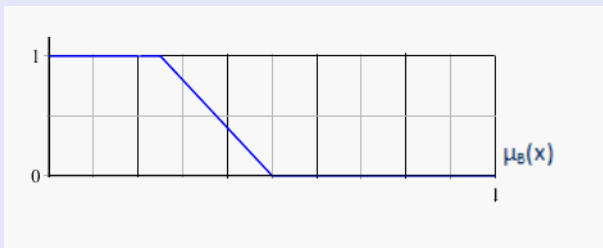
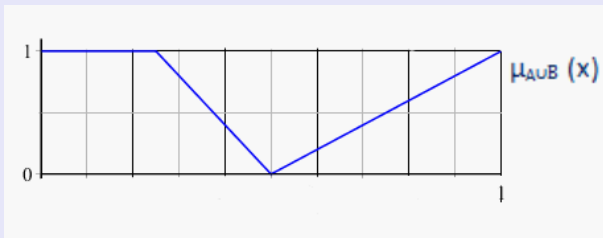


FIGURE –

et la courbe de  $A \cup B(x)$  donnée par



### Exemple 3.4

Alors,  $\tau = \{\emptyset, A, B, A \cup B, X\}$  est une topologie floue sur  $X$ , il est facile de voir que  $\overline{A} = B^c$ ,  $\overline{B} = A^c$ ,  $\overline{A \cup B} = X$ ,  $(A^c)^0 = B$ ,  $(B^c)^0 = A$ , et  $((A \cup B)^c)^0 = \emptyset$ .



### Exemple 3.4

Alors,  $\tau = \{\emptyset, A, B, A \cup B, X\}$  est une topologie floue sur  $X$ , il est facile de voir que  $\overline{A} = B^c$ ,  $\overline{B} = A^c$ ,  $\overline{A \cup B} = X$ ,  $(A^c)^0 = B$ ,  $(B^c)^0 = A$ , et  $((A \cup B)^c)^0 = \emptyset$ .

### Théorème 3.1

Soient  $(X, \tau)$  un espace topologique flou et  $A$  est un sous-ensemble flou dans  $X$ . Alors

- $A^0 = (\overline{(A^c)})^c$ ;
- $\overline{A} = ((A^c)^0)^c$ ;
- $(\overline{A})^c = (A^c)^0$ ;
- $\overline{(A^c)} = (A^0)^c$ .

## 3.2 Topologie floue générée par une relation floue.

### Définition 3.15

Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ . Alors pour tout  $x \in X$ , on définit deux ensembles flous  $L_x$  et  $R_x$  par :

$$L_x(y) = \mathcal{R}(y, x), \text{ pour tous } y \in X ;$$

$$R_x(y) = \mathcal{R}(x, y), \text{ pour tous } y \in X.$$

$L_x$ ,  $R_x$  sont appelés contour inférieure et contour supérieure respectivement de l'élément  $x \in X$ .

### Définition 3.15

Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ . Alors pour tout  $x \in X$ , on définit deux ensembles flous  $L_x$  et  $R_x$  par :

$$L_x(y) = \mathcal{R}(y, x), \text{ pour tous } y \in X ;$$

$$R_x(y) = \mathcal{R}(x, y), \text{ pour tous } y \in X.$$

$L_x, R_x$  sont appelés contour inférieure et contour supérieure respectivement de l'élément  $x \in X$ .

### Définition 3.16

Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ . On définit  $\mathcal{S}$  par :

$$\mathcal{S} = \{L_x\}_{x \in X} \cup \{R_x\}_{x \in X}.$$

La topologie floue qui est générée par l'ensemble  $\mathcal{S}$  s'appelle la topologie floue générée par la relation floue  $\mathcal{R}$  et dénoté par  $\tau_{\mathcal{R}}$ .

### Exemple 3.5

Soient  $X = \{x, y, z\}$  et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$  donnée par

$\mathcal{R}$	x	y	z
x	1	0.5	0
y	0	1	0.8
z	0.7	0	1

Alors,  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ ,  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$  sont des ensembles flous sur  $X$  donnés par :

$$L_x = \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0 \rangle; \langle z, 0.7 \rangle\} ;$$

$$L_y = \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0 \rangle\} ;$$

$$L_z = \{\langle x, 0 \rangle; \langle y, 0.8 \rangle; \langle z, 1 \rangle\} ;$$

$$R_x = \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle; \langle z, 0 \rangle\} ;$$

$$R_y = \{\langle x, 0 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.8 \rangle\} ;$$

$$R_z = \{\langle x, 0.7 \rangle; \langle y, 0 \rangle; \langle z, 1 \rangle\}.$$

Donc,

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, L_x, L_y, L_z\} ;$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, R_x, R_y, R_z\} ;$$

### Exemple 3.5

et

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{ \{ \langle x, 1 \rangle; \langle z, 0.7 \rangle \}, \{ \langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 1 \rangle \}, \{ \langle y, 0.8 \rangle; \langle z, 1 \rangle \}, \{ \langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle \}, \\ &\quad \{ \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.8 \rangle \}, \{ \langle x, 0.7 \rangle; \langle z, 1 \rangle \} \} \\ &= \{ L_x, L_y, L_z \} \cup \{ R_x, R_y, R_z \}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\tau_{\mathcal{R}} &= \{ \{ \emptyset, X, L_x, L_y, L_z, R_x, R_y, R_z, \{ \langle x, 1 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.7 \rangle \}, \{ \langle x, 0.5 \rangle \}, \\ &\quad \{ \langle z, 0.7 \rangle \}, \{ \langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle; \langle z, 0.7 \rangle \}, \{ \langle x, 1 \rangle \}, \{ \langle x, 1 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.8 \rangle \}, \\ &\quad \{ \langle x, 1 \rangle; \langle z, 1 \rangle \}, \{ \langle x, 0.7 \rangle; \langle z, 0.7 \rangle \}, \{ \langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 1 \rangle \}, \{ \langle y, 0.8 \rangle \}, \\ &\quad \{ \langle x, 1 \rangle; \langle y, 1 \rangle \}, \{ \langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle \}, \{ \langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.8 \rangle \}, \{ \langle y, 1 \rangle \}, \\ &\quad \{ \langle x, 0.7 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 1 \rangle \}, \{ \langle y, 0.5 \rangle \}, \{ \langle y, 1 \rangle; \langle z, 1 \rangle \}, \{ \langle y, 0.8 \rangle; \langle z, 0.8 \rangle \}, \\ &\quad \{ \langle x, 0.7 \rangle; \langle y, 0.8 \rangle; \langle z, 1 \rangle \}, \{ \langle z, 1 \rangle \}, \{ \langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle; \langle z, 1 \rangle \}, \{ \langle x, 0.7 \rangle \}, \\ &\quad \{ \langle z, 0.8 \rangle \}, \{ \langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.8 \rangle; \langle z, 1 \rangle \} \}.\end{aligned}$$

### Proposition 3.2

Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ . Si  $\mathcal{R}$  est une relation floue symétrique, alors  $\tau_1 = \tau_2$ .

### Proposition 3.2

Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ . Si  $\mathcal{R}$  est une relation floue symétrique, alors  $\tau_1 = \tau_2$ .

### Proposition 3.3

Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X$ . Si  $\mathcal{R}$  est une relation pré-ordre floue, alors

- Un ouvert flou de  $A \in \tau_2$ , alors  $\bigcup_{x:A(x)=1} L_x \subseteq A$ .
- Un ouvert flou de  $A \in \tau_1$ , alors  $\bigcup_{x:A(x)=1} R_x \subseteq A$ .



### 3.3 Topologies floues particuliers générées par des relations floues.

### Définition 3.17 (La topologie floue $T_0$ )

Un espace topologique flou  $(X, \tau)$  est dit  $T_0$  flou si pour  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , il existe un ouvert flou  $U$  tel que  $U(x) \neq U(y)$ .

### Définition 3.17 (La topologie floue $T_0$ )

Un espace topologique flou  $(X, \tau)$  est dit  $T_0$  flou si pour  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , il existe un ouvert flou  $U$  tel que  $U(x) \neq U(y)$ .

### Exemple 3.6

Soit  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X = \{x, y\}$ , donnée par

$\mathcal{R}$	x	y
x	0.5	0.6
y	0.5	0.4

Alors,  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $R_x$  et  $R_y$  sont des ensembles flous sur  $X$  donnés par :

$$L_x = \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle\} ;$$

$$L_y = \{\langle x, 0.6 \rangle; \langle y, 0.4 \rangle\} ;$$

$$R_y = \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.6 \rangle\} ;$$

$$R_x = \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0.4 \rangle\}.$$

### Exemple 3.6

Donc,

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, L_x, L_y\} ;$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, R_x, R_y\} ;$$

et

$$\mathcal{S} = \{L_x, L_y, R_x, R_y\}.$$

Donc,  $\tau_{\mathcal{R}} = \{\emptyset, X, L_x, L_y, R_x, R_y, \{\langle x, 0.6 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle\}, \{\langle x, 0.6 \rangle; \langle y, 0.6 \rangle\}\}$  et pour  $x, y \in X$  tels que  $x \neq y$ , il existe  $L_y \in \tau_{\mathcal{R}}$  avec  $L_y(x) \neq L_y(y)$  (i.e.,  $0.6 \neq 0.4$ ), alors  $(X, \tau_{\mathcal{R}})$  est un  $T_0$  flou.

### Exemple 3.6

Donc,

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, L_x, L_y\} ;$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, R_x, R_y\} ;$$

et

$$\mathcal{S} = \{L_x, L_y, R_x, R_y\}.$$

Donc,  $\tau_{\mathcal{R}} = \{\emptyset, X, L_x, L_y, R_x, R_y, \{\langle x, 0.6 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle\}, \{\langle x, 0.6 \rangle; \langle y, 0.6 \rangle\}\}$  et pour  $x, y \in X$  tels que  $x \neq y$ , il existe  $L_y \in \tau_{\mathcal{R}}$  avec  $L_y(x) \neq L_y(y)$  (i.e.,  $0.6 \neq 0.4$ ), alors  $(X, \tau_{\mathcal{R}})$  est un  $T_0$  flou.

### Définition 3.18 (La topologie floue $T_1$ )

Un espace topologique flou  $(X, \tau)$  est dit  $T_1$  flou si pour deux points flous distincts  $x_r, y_s$  dans  $X$ , il existe deux ouverts flous  $U, V$  tels que  $x_r \in U$ ,  $x_r \notin V$ ,  $y_s \notin U$ ,  $y_s \in V$ .

### Exemple 3.7

Soit  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X = \{x, y, z\}$  donnée par :

$\mathcal{R}$	x	y	z
x	1	0.5	0
y	0	1	0.8
z	0.7	0	1

Alors,  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ ,  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$  sont des ensembles flous sur  $X$  donnés par :

$$L_x = \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0 \rangle; \langle z, 0.7 \rangle\};$$

$$L_y = \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0 \rangle\};$$

$$L_z = \{\langle x, 0 \rangle; \langle y, 0.8 \rangle; \langle z, 1 \rangle\};$$

$$R_x = \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.5 \rangle; \langle z, 0 \rangle\};$$

$$R_y = \{\langle x, 0 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.8 \rangle\};$$

$$R_z = \{\langle x, 0.7 \rangle; \langle y, 0 \rangle; \langle z, 1 \rangle\}.$$

$(X, \tau_{\mathcal{R}})$  est  $T_1$  flou, car pour les points flous  $x_r, y_s$  dans  $X$ , ils existent deux ouverts flous  $U = L_x \cup R_z$  et  $V = L_z \cup R_y$  tels que  $x_r \in U$ ,  $x_r \notin V$ ,  $y_s \notin U$ ,  $y_s \in V$ , pour les points flous  $y_r, z_s$  dans  $X$ , ils existent deux ouverts flous  $U = R_x \cup L_y$  et  $V = L_x \cup R_z$  tels que  $y_r \in U$ ,  $y_r \notin V$ ,  $z_s \notin U$ ,  $z_s \in V$ , pour les points flous  $x_r, z_s$  dans  $X$ , ils existent deux ouverts flous  $U = R_x \cup L_y$  et  $V = L_z \cup R_y$  tels que  $x_r \in U$ ,  $x_r \notin V$ ,  $z_s \notin U$ ,  $z_s \in V$ .

### Définition 3.19 (La topologie floue $T_2$ )

Un espace topologique flou  $(X, \tau)$  est dit  $T_2$  flou ou Hausdorff flou si pour deux points flous distincts  $x_r, y_s$  dans  $X$ , il existe deux ouverts flous  $U, V$  tels que  $x_r \in U$ ,  $y_s \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ .

### Définition 3.19 (La topologie floue $T_2$ )

Un espace topologique flou  $(X, \tau)$  est dit  $T_2$  flou ou Hausdorff flou si pour deux points flous distincts  $x_r, y_s$  dans  $X$ , il existe deux ouverts flous  $U, V$  tels que  $x_r \in U$ ,  $y_s \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ .

### Exemple 3.8

Soit  $\mathcal{R}$  une relation floue sur  $X = \{x, y, z\}$  donnée par :

$\mathcal{R}$	x	y	z
x	1	0.3	0.5
y	0	1	0
z	0	0.9	1

Alors,  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ ,  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$  sont des ensembles flous sur  $X$  donnés par :

$$L_x = \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0 \rangle; \langle z, 0 \rangle\} ;$$

$$L_y = \{\langle x, 0.3 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0.9 \rangle\} ;$$

$$L_z = \{\langle x, 0.5 \rangle; \langle y, 0 \rangle; \langle z, 1 \rangle\} ;$$

$$R_x = \{\langle x, 1 \rangle; \langle y, 0.3 \rangle; \langle z, 0.5 \rangle\} ;$$

$$R_y = \{\langle x, 0 \rangle; \langle y, 1 \rangle; \langle z, 0 \rangle\} ;$$

$$R_z = \{\langle x, 0 \rangle; \langle y, 0.9 \rangle; \langle z, 1 \rangle\} .$$



### Exemple 3.8

$(X, \tau_{\mathcal{R}})$  est  $T_2$  flou, car pour les points flous  $x_r, y_s$  dans  $X$ , ils existent deux ouverts flous  $U = L_x$  et  $V = R_y$  tels que  $x_r \in U$ ,  $y_s \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ , pour les points flous  $y_r, z_s$  dans  $X$ , ils existent deux ouverts flous  $U = R_y$  et  $V = L_z \cap R_z$  tels que  $y_r \in U$ ,  $z_s \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ , et pour les points flous  $x_r, z_s$  dans  $X$ , ils existent deux ouverts flous  $U = L_x$  et  $V = L_z \cap R_z$  tels que  $x_r \in U$ ,  $z_s \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ .

## Conclusion

Dans cette présentation, nous avons étudié la notion de la topologie flou introduit par le professeur Chang comme une généralisation de la notion de topologie classique, on a vu les défférent définitions et exemples sur cette théorie. Aussi, nous avons étudié un type de topologie flou qui s'appelle la topologie floue générée par une relation floue. Enfin, nous avons traité certains types de cette topologie tels que  $T_0, T_1, T_2$ .

## Quelques références importants



C.L. Chang, Fuzzy topological spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24, 182-190 (1968).



V. Knoblauch, Topologies defined by binary relations, Department of Economics Working Paper Series, University of Connecticut, Storrs, 2009.



R. Lowen, Topologies flous, Comptes Rendus Mathematique Academie des Sciences Paris, 278, 925-928 (1974).



S. Mishra, R. Srivastava, Fuzzy topologies generated by fuzzy relations, Soft Computing, 22, 373-385 (2018).



N. Palaniappan, Fuzzy topology, Narosa Publications, Harrow, 2002.



L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353 (1965).



L.A. Zadeh, Similarity relation and fuzzy orderings, Informtion Sciences, 3, 177-200 (1971).

بَارَكَ اللَّهُ فِيكُمْ  
شكراً على حسن الانتباه

*MERCI POUR VOTRE  
ATTENTION*

*Thanks for coming  
and listening*